

質傳效率於兩端迴流的平行管道中之解析解研究

The Theoretical Study of Mass Transfer Efficiency in a Parallel-Plate Channel with External Refluxes

計劃編號: NSC 89-2214-E-032-001

執行期限: 88/08/01~89/07/31

主持人: 何啓東 淡江大學化工系 副教授

研究生: 江淑菁 王振國 陳永宗

一、中文摘要(關鍵詞: 質量傳送、共軛格拉茲問題、外部迴流、正交展開法)

對於兩平行板間具有迴流效應的共軛格拉茲系統的質量傳送問題，使用正交展開法(orthogonal expansion technique)求得其在固定兩壁濃度之解析解。相較於單行程系統(無可透性隔板的裝置)，將討論加裝外部迴流和可透性隔板之裝置，對質量傳送效率的改善。

將兩平板間的流體視為完全展開之速度分佈，忽略軸質量傳導，且流體物性為常數，而加以迴流裝置時對質量傳送效果的影響，將與無隔板系統比較。結果顯示，續流效果及滯留時間是影響質量傳送行為的兩個因素，且在格拉茲數小時，無隔板系統質傳效果較兩端具迴流系統的質傳效果佳，當格拉茲數大時則反之。然而在格拉茲數大的系統，迴流的引入有促進質量傳送之效果，但對於格拉茲數小的系統，迴流裝置之引入將減少質量傳送。

本研究的目的是發展完整的數學理論，及設計改善兩平行板間具迴流效應之質傳效率的裝置，並探討迴流和隔板位置對質量傳送效率的影響。

英文摘要(Keywords: Mass transfer; Conjugated Graetz problem; External Reflux; Orthogonal expansion technique)

The effect of the mass transfer through a parallel-plate channel with uniform wall concentration and external refluxes has been theoretically investigated by use of an orthogonal technique. The improvement in mass transfer efficiency for the device with external refluxes and a permeable barrier compared with that in a single-pass device (without a permeable barrier inserted) will be discussed.

It is the purpose of study to develop the

theoretical formulation of designing a double-pass mass-transfer device with external refluxes at both ends. Also, the improvement in mass transfer efficiency of such double-pass device and the influence of refluxes and barrier position on the device performance will be studied.

二、計劃緣由與目的

伴隨著動量傳送、熱量傳送和質量傳送的流體流動現象，在許多的工程領域中常常出現，尤其在化學工程中的設計與操作，更是一門值得深入研究的課題。而迴流裝置在很多分離程序和反應器之設計是非常重要的考慮因素，且非常廣泛被應用在吸附、發酵和聚合[1-3]等方面。探討動量傳送和質量傳送(或熱量傳送)聯立的問題，若再加入迴流效應，則解析解的獲得就變成非常困難。

此類流體流動，伴隨著動量傳送和質量傳送(或熱量傳送)的問題中，最為人熟悉的莫過於格拉茲問題(Graetz Problems)[4-5]。本文是將兩平行板間之質量傳送，加裝一可透性的隔板，然後在兩端裝置幫浦(pump)產生迴流效果，形成一組二行程的質量傳送系統。其所衍生之共軛格拉茲問題(Conjugated Graetz Problems)[6-8]以正交展開方法(Orthogonal Expansion Technique)[9-13]求出其濃度分佈，及迴流效應和隔板位置對此質量傳送的影響。

在許多化工程序中，加裝迴流裝置可產生預混效果(premixing effect)或預混效果(preheating effect)，因此提高質量或熱量傳送效率。本文是探討一組具迴流之二行程質量傳送系統的模型與建立，除了預混效果外，中間可透性隔板的滲透率，亦可提高質傳效率。

本研究是建立和推導質量傳送系統的數學模型之理論方程式，並求此共軛格拉茲方程式之解析解。可預測出口濃度和此新設計系統之質傳效率提升率，並探討迴流效應和隔板位置對具迴流之二行程質量傳送系統中質量傳送效率的影響。

三、研究方法及成果

考慮一組平板式質量傳送系統，如圖(一)所示，長度為 L ，且寬度為 B 較厚度為 W 大甚多 ($B \gg W$)，且可視為無限寬。管道間加裝一可透性之隔板，將系統分隔成各為厚度 ΔW 及 $(1-\Delta)W$ 的上下兩通道，如圖(二)所示。而管道外壁維持固定濃度之裝置，使其保持在 C_s 之固定濃度。

整個系統的數學模型之理論建立，是基於下面之假設：

- (1)物性常數及管壁濃度保持一定；
- (2)忽略軸向擴散(axial diffusion) 和邊端效應(end effects)；
- (3)流體以穩定狀態與層流方式流經管道；
- (4)質傳擴散只發生於可透性隔板。

$$\frac{\partial^2 \psi_a(\eta_a, \xi)}{\partial \eta_a^2} = \left(\frac{W_a^2 v_a}{LD} \right) \frac{\partial \psi_a(\eta_a, \xi)}{\partial \xi} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_b(\eta_b, \xi)}{\partial \eta_b^2} = \left(\frac{W_b^2 v_b}{LD} \right) \frac{\partial \psi_b(\eta_b, \xi)}{\partial \xi} \quad (2)$$

$$v_a(\eta_a) = \bar{v}_a(6\eta_a - 6\eta_a^2), \quad 0 \leq \eta_a \leq 1 \quad (3)$$

$$v_b(\eta_b) = \bar{v}_b(6\eta_b - 6\eta_b^2), \quad 0 \leq \eta_b \leq 1 \quad (4)$$

其中

$$v_a = [(R+1)V / W_a B] = \bar{v}_a(R+1), \quad v_b = -[VR / W_b B] = \bar{v}_b R,$$

$$G_{Z,m} = \frac{V(W_a + W_b)}{DBL} = \frac{VW}{DBL}, \quad W_a = \Delta W, \quad W_b = (1-\Delta)W,$$

$$\frac{W_a}{W_b} = \frac{\Delta}{1-\Delta}, \quad \theta_a = 1 - \psi_a = \frac{C_a - C_i}{C_s - C_i}, \quad \theta_b = 1 - \psi_b = \frac{C_b - C_i}{C_s - C_i} \quad (5)$$

方程式(1)、(2)之邊界條件如下：

$$\psi_a(0, \xi) = 0 \quad (6)$$

$$\psi_b(0, \xi) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi_a(1, \xi)}{\partial \eta_a} = -\frac{W_a}{W_b} \frac{\partial \psi_b(1, \xi)}{\partial \eta_b} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi_a(1, \xi)}{\partial \eta_a} = \frac{W_a \varepsilon}{\delta} [\psi_b(1, \xi) - \psi_a(1, \xi)] \quad (9)$$

且平均出口濃度為

$$\psi_a(\eta_a, 1) = \psi_b(\eta_b, 1) = \psi_F = \frac{C_F - C_s}{C_i - C_s} \quad (10)$$

解此系統偏微分方程式，以分離變數法如下：

$$\psi_a(\eta_a, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{a,m} F_{a,m}(\eta_a) G_m(\xi) \quad (11)$$

$$\psi_b(\eta_b, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{b,m} F_{b,m}(\eta_b) G_m(\xi) \quad (12)$$

代入式(1)和(2)與邊界條件式(6)至式(9)得：

$$G_m(\xi) = e^{-\lambda_m(1-\xi)} \quad (13)$$

$$F_{a,m}''(\eta_a) - \left[\frac{\lambda_m W_a^2 v_a(\eta_a)}{LD} \right] F_{a,m}(\eta_a) = 0 \quad (14)$$

$$F_{b,m}''(\eta_b) - \left[\frac{\lambda_m W_b^2 v_b(\eta_b)}{LD} \right] F_{b,m}(\eta_b) = 0 \quad (15)$$

$$F_{a,m}(0) = 0 \quad (16)$$

$$F_{b,m}(0) = 0 \quad (17)$$

$$S_{a,m} F_{a,m}'(1) = -\frac{W_a}{W_b} S_{b,m} F_{b,m}'(1) \quad (18)$$

$$S_{a,m} F_{a,m}'(1) = \frac{W_a \varepsilon}{\delta} [S_{b,m} F_{b,m}(1) - S_{a,m} F_{a,m}(1)] \quad (19)$$

對於解式(14)與式(15)兩常微分方程是以級數解求其解之， $F_{a,m}(\eta_a)$ 與 $F_{b,m}(\eta_b)$ 分別為 η_a 與 η_b 之多項式，並代入式(16)，式(17)得：

$$F_{a,m}(\eta_a) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} \eta_a^n, \quad e_{m0} = 0 \text{ (式(16))}, \quad e_{m1} = 1 \text{ (選定值)} \quad (20)$$

$$F_{b,m}(\eta_b) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} \eta_b^n, \quad e_{m0} = 0 \text{ (式(17))}, \quad e_{m1} = 1 \text{ (選定值)} \quad (21)$$

將式(18)與(19)結合得：

$$\frac{S_{a,m}}{S_{b,m}} = \frac{\Delta \varepsilon (W / \delta) F_{b,m}(1)}{\Delta \varepsilon (W / \delta) F_{a,m}(1) + F_{a,m}'(1)} = -\frac{\Delta}{(1-\Delta)} \frac{F_{b,m}'(1)}{F_{a,m}'(1)} \quad (22)$$

因此，由式(22)可輕易求出特徵值，然後由式(20)及式(21)的定義求得。又由式(14)至式(19)可得一具正交性質之積分方程且當 $n \neq m$ ，

$$W_b \int_0^1 \left[\frac{W_a^2 v_a(\eta_a)}{LD} \right] S_{a,m} S_{a,n} F_{a,m} F_{a,n} d\eta_a + W_a \int_0^1 \left[\frac{W_b^2 v_b(\eta_b)}{LD} \right] S_{b,m} S_{b,n} F_{b,m} F_{b,n} d\eta_b = 0 \quad (23)$$

又下層末端溫度為：

$$\psi_L = \sum_{m=1}^{\infty} S_{a,m} F_{a,m}(\eta_a) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{b,m} F_{b,m}(\eta_b) \quad (24)$$

將式(24)引入式(23)得：

$$\begin{aligned} \psi_L \left[\frac{W_b S_{a,m}}{\lambda_m} \{F_{a,m}'(1) - F_{a,m}'(0)\} + \frac{W_a S_{b,m}}{\lambda_m} \{F_{b,m}'(1) - F_{b,m}'(0)\} \right] \\ = W_b S_{a,m}^2 \left[F_{a,m}(1) \frac{\mathcal{F}_{a,m}'(1)}{\partial \lambda_m} - F_{a,m}(1) \frac{\mathcal{F}_{a,m}'(1)}{\partial \lambda_m} + F_{a,m}'(0) \frac{\mathcal{F}_{a,m}'(0)}{\partial \lambda_m} \right] \\ + W_a S_{b,m}^2 \left[F_{b,m}(1) \frac{\mathcal{F}_{b,m}'(1)}{\partial \lambda_m} - F_{b,m}(1) \frac{\mathcal{F}_{b,m}'(1)}{\partial \lambda_m} + F_{b,m}'(0) \frac{\mathcal{F}_{b,m}'(0)}{\partial \lambda_m} \right] \quad (25) \end{aligned}$$

利用下層末端經泵到上層末端，其無因次溫度(在 $\xi = 1$)可分別表示如下：

$$\psi_L = \frac{\int_0^1 v_a W_a B \psi_a(\eta_a, 1) d\eta_a}{V(R+1)} = \frac{1}{(R+1)G_{Z,m}\Delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{a,m}}{\lambda_m} \{F_{a,m}'(1) - F_{a,m}'(0)\} \quad (26)$$

和

$$\psi_L = \frac{-\int_0^1 v_b W_b B \psi_b(\eta_b, 1) d\eta_b}{VR} = \frac{-1}{RG_{Z,m}(1-\Delta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{b,m}}{\lambda_m} \{F_{b,m}'(1) - F_{b,m}'(0)\} \quad (27)$$

由上述所列出之方程式，未知而須待定者為 $S_{a,m}$ 、 $S_{b,m}$ 和 ψ_L ，共有 $(2n+1)$ 個未知數，先假設 ψ_L 值，代入式(18)、式(19)和式(26)，求出 $S_{a,m}$ 和 $S_{b,m}$ ，然後利用式(27)或式(28)驗證 ψ_L 值。

因以上之結果，及能量守恒關係，可求得出口溫度 ψ_L 和入口混合溫度 $\psi_a(\eta_a, 0)$ 分別如下：

$$\psi_L = 1 - \frac{1}{G_{Z,m}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda_m})}{\lambda_m \Delta} S_{a,m} F'_{a,m}(0) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda_m})}{\lambda_m (1-\Delta)} S_{b,m} F'_{b,m}(0) \right] \quad (28)$$

$$\psi_a(\eta_a, 0) = \frac{1}{R+1} \left[1 - \frac{1}{G_{Z,m}(1-\Delta)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_m} S_{b,m}}{\lambda_m} \right) \{ F'_{b,m}(1) - F'_{b,m}(0) \} \right] \quad (29)$$

定義一謝塢數(Sherwood number)，以獲得質傳效率改善程度，其中謝塢數之定義如下：

$$Sh = \frac{k_m W}{D} \quad (30)$$

效率的定義如下：

$$I = \frac{Sh - Sh_0}{Sh_0} = \frac{\psi_{0,F} - \psi_F}{1 - \psi_{0,F}} = \frac{\theta_F - \theta_{0,F}}{\theta_{0,F}} \quad (31)$$

其中

$$Sh_0 = \frac{k_{m,0} W}{D} = \frac{VW}{2DBL} (1 - \psi_{0,F}) = 0.5 G_{Z,m} \theta_{0,i} \quad (32)$$

四、結論與討論

本研究是採用正交展開方法，求得固定管壁濃度之具雙流式迴流型兩平行板的質傳交換器之解析解，並分析其質傳效率分析。

影響入口濃度和出口濃度的因素有兩個，即質量格拉茲數和迴流比值。質量格拉茲數大小可表示其流體流動的快慢，也影響流體之滯流時間，而迴流比值產生續流效果，可影響改變入口處濃度。所以，質量格拉茲數與迴流比值為探討此系統受質傳效率之重要因素。由表(一)可看出在迴流比值固定下，隨著質量格拉茲數的增加，滯留時間愈短，則出口的無因次濃度會隨之降低。而且在任何質量格拉茲數時，迴流比值愈大，其出口濃度愈高。同時，表(一)亦可發現，在相同的 Δ 下，迴流比值越大，質傳效率愈高，代表了質傳量越多。隔板的位置亦會影響質傳量，亦即在固定的迴流比值，其質傳效率的大小次序為 $\Delta = 0.25 > \Delta = 0.75 > \Delta = 0.50$ 。

五、符號說明

- C : concentration of fluid, mole/cm³
 h_m : average mass transfer coefficient, kW/m²·K
 I : improvement of the degree of mass transfer
 L : conduit length, cm
 Sh : Sherwood number
 S_m : expansion coefficient associated with λ_m
 R : reflux ratio
 V : input volume flow rate of conduit, cm³/s
 v : velocity distribution of fluid, cm/s

- x : longitudinal coordinate, cm
 z : transversal coordinate, cm

希臘符號：

- ξ : longitudinal coordinate, z/L
 ψ : dimensionless concentration
 λ_m : eigenvalue
 η : transversal coordinate, x/W

上下標：

- a : in forward flow channel
 b : in backward flow channel
 I : at the inlet
 L : at the outlet, $\xi = 1$
 o : in a single-pass device without recycle
 s : at the wall surface

致謝-本研究承行政院國家科學委員會補助經費(NSC 89-2214-E-032-001)，特此致謝。

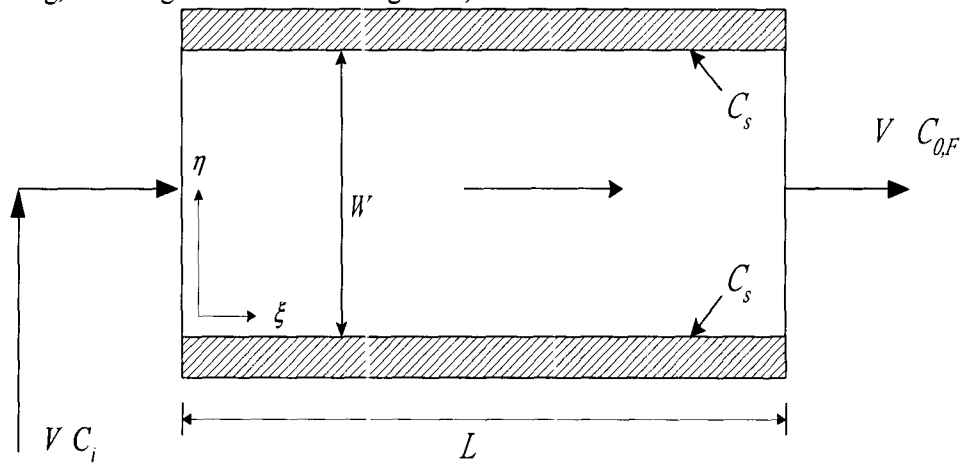
六、參考文獻

1. Siegel, M. H., Merchuk, J. C., and Schugerl, K., Air-Lift Reactor Analysis: Interrelationships Between Riser, Downcomer, and Gas-Liquid Separator Behavior, Including Gas Recirculation Effects, *AIChE J.*, 1986, **32**, 1585-1595.
2. Jones, A. G., Liquid Circulation in a Drift-Tube Bubble Column, *Chem. Eng. Sci.*, 1985, **40**, 449-462.
3. Marquart, R., Circulation of High-Viscosity Newtonian and Non-Newtonian Liquids in Jet Loop Reactor, *Int. Chem. Eng.*, 1981, **20**, 399-407.
4. Shah, R. K. and London, A. L., *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press, New York, 1978, p.169,
5. Dang, V-D., and Steinberg, M., Convective Diffusion with Homogeneous and Heterogeneous Reaction in a Tube, *J. Phys. Chem.*, 1980, **84**, 214-219.
6. Yeh, H. M., Tsai, S. W. and Chiang, C. L., Recycle Effects on Heat and Mass Transfer through a Parallel-Plate Channel, *AIChE J.*, 1987, **33**, 1743-1746.
7. Papoutsakis, E., and Ramkrishna, D., Conjugated Graetz Problems. II: Fluid-Fluid Problems, *Chem. Eng. Sci.*, 1981, **36**, 1393-1399.
8. Yin, X. and H. H. Bau, "The Conjugated Graetz Problem with Axial Conduction," *Trans. ASME*, **118**, pp. 482-485 (1996).
9. Tsai, S. W., and Yeh, H. M., A Study of the Separation Efficiency in Horizontal Thermal Diffusion Columns with External Refluxes, *Can. J. Chem. Eng.*, 1985, **63**, 406-411.
10. Yeh, H. M., Tsai, S. W., and Lin, C. S., A Study of the Separation Efficiency in Thermal Diffusion Columns with a Vertical Permeable Barrier, *AIChE J.*, 1986, **32**, 971-980.
11. Yeh, H. M., Tsai, S. W. and Chiang, C. L., Recycle Effects on Heat and Mass Transfer through a Parallel-Plate Channel, *AIChE J.*, 1987, **33**, 1743-1746.

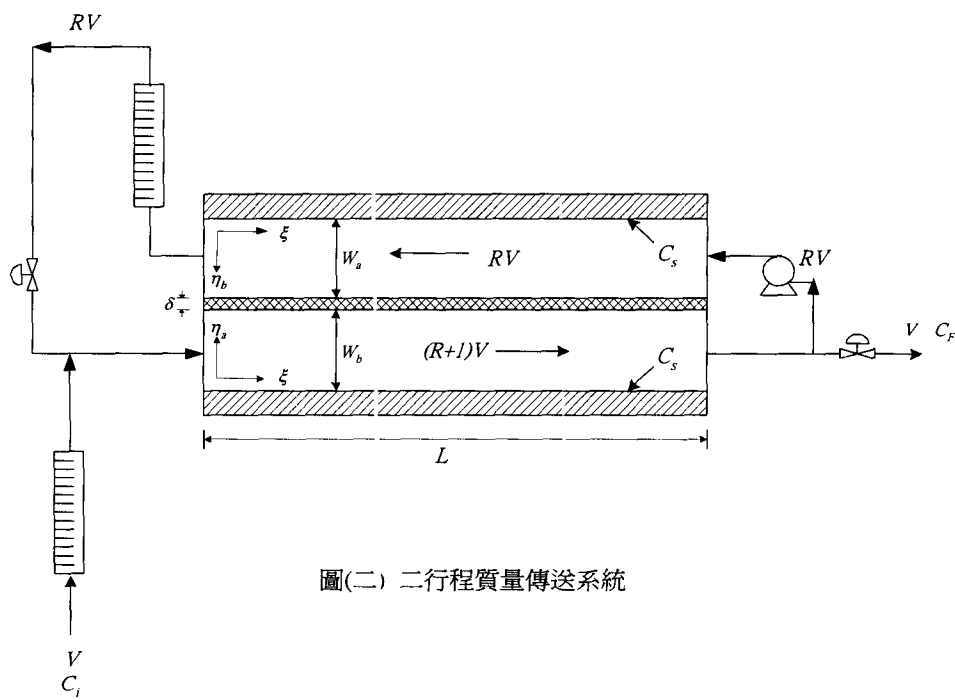
12. Ebadian, M. A. and Zhang, H. Y., An Exact Solution of Extended Graetz Problem with Axial Heat Conduction, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1989, 32, 1709-1717.

"An Analytical Study of Heat and Mass Transfer Through a Parallel-Plate Channel with Recycle", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 1998, 41, 2589-2599.

13. Ho, Chii-Dong, Ho-Ming Yeh and Wen-Song Sheu,



圖(一) 單行程質傳系統



圖(二) 二行程質量傳送系統

表(一) 質量傳送效率與迴流比值和隔板的位置之關係($\epsilon(w/\delta) = 5$)

$I(\%)$	$R=1.0$			$R=2.0$			$R=5.0$		
	$\Delta=0.25$	$\Delta=0.5$	$\Delta=0.75$	$\Delta=0.25$	$\Delta=0.5$	$\Delta=0.75$	$\Delta=0.25$	$\Delta=0.5$	$\Delta=0.75$
$G_{z,m}$	0.025	-0.33	-0.52	-0.078	-0.82	-1.04	-0.52	-1.83	-1.93
10	58.15	37.39	43.54	58.97	38.18	43.20	59.55	38.75	42.82
100	266.22	148.27	192.83	303.94	165.13	201.83	341.75	181.85	210.76
1000	349.44	180.78	243.98	416.55	205.43	258.66	489.50	230.80	273.59